

Cours
MAT-5154-2
Mathématiques financières
en contexte général

Mathématique



PRÉSENTATION DU COURS

Le but du cours *Mathématiques financières en contexte général* est de rendre l'adulte apte à traiter efficacement des situations qui requièrent l'évaluation de propositions en matière de placements ainsi que la création de divers scénarios de financement dans une perspective générale.

L'adulte qui suit le cours apprend à analyser et à interpréter des situations financières, puis à élaborer des scénarios de financement répondant à ses besoins. Qu'il s'agisse de gestion personnelle, familiale ou dans un contexte professionnel, ce cours l'amène à se familiariser avec des concepts financiers tels que *capitalisation (valeur acquise ou future)*, *taux d'intérêt fixe*, *taux d'intérêt composé*, en vue de prendre des décisions éclairées. L'adulte utilise les diagrammes temporels pour résoudre des problèmes d'annuités, ce qui l'amène à évaluer sa planification financière en tout temps et à rétroagir au besoin.

Ce cours étant une initiation, tous les calculs se font à l'aide de formules préalablement présentées. L'adulte calcule les soldes successifs d'un fonds où l'on effectue des dépôts quelconques, il évalue la valeur d'une dette à une date donnée en se basant sur les versements dus ou estime la capitalisation et l'actualisation (valeur actuelle) d'une suite de versements égaux en utilisant soit des formules, soit des tableurs électroniques. Il s'initie au calcul de taux équivalents pour déterminer une annuité ou le nombre de versements. De plus, l'adulte sera amené à analyser le comportement des fonctions financières sur différentes périodes de temps et à comparer les représentations graphiques des situations à l'étude.

Enfin, ce cours permet à l'adulte d'explorer les concepts de versement périodique et de nombre de versements nécessaires quand la valeur du versement régulier est définie à l'avance. Une introduction aux concepts de valeur résiduelle, d'intérêt et d'amortissement du capital à une date donnée ainsi que de versement complémentaire d'une annuité de remboursement y est présentée dans une perspective générale.

Au terme de ce cours, l'adulte sera en mesure de décoder le langage financier et d'utiliser des outils de calcul liés aux mathématiques financières pour évaluer différentes propositions de placement dans le but de choisir celle qui convient le mieux à la situation. Il pourra également créer un plan de financement adapté à une situation particulière.

COMPÉTENCES DISCIPLINAIRES

La résolution des situations-problèmes de ce cours implique le recours aux trois compétences disciplinaires, soit :

- *Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes;*
- *Déployer un raisonnement mathématique;*
- *Communiquer à l'aide du langage mathématique.*

L'emploi de stratégies efficaces incite l'adulte à déployer un raisonnement mathématique rigoureux et à communiquer avec clarté, à l'aide du langage mathématique, en démontrant qu'il en respecte les codes et les conventions particulières. C'est donc par l'activation intégrée des trois compétences disciplinaires et d'autres ressources que l'adulte parvient à résoudre des situations-problèmes.

La rubrique *Démarche et stratégies* explique comment faire évoluer une situation-problème vers une solution par la mise à contribution des trois compétences disciplinaires.

DÉMARCHE ET STRATÉGIES

Pour résoudre une situation-problème, l'adulte a besoin de stratégies efficaces qu'il adapte aux situations présentées.

Il traite les situations-problèmes en utilisant une démarche qui comprend quatre phases de résolution :

- **la représentation;**
- **la planification;**
- **l'activation;**
- **la réflexion.**

Le tableau qui suit présente sommairement chacune des phases de la démarche de résolution et quelques exemples de stratégies que l'adulte peut employer pour traiter les situations. Ces phases ne se présentent pas nécessairement de façon successive. De nombreux allers-retours entre les quatre phases peuvent être nécessaires lors de la résolution d'une situation-problème.

DÉMARCHE ET STRATÉGIES	
LA REPRÉSENTATION	
<ul style="list-style-type: none"> - L'adulte prend contact avec la situation-problème pour bien cerner le contexte, le problème à résoudre et la tâche à effectuer. - Il utilise des stratégies d'observation et de représentation essentielles au raisonnement inductif. - Lors de son appropriation du contexte et du problème, l'adulte déploie des raisonnements déductifs, en particulier lorsqu'il s'agit de données implicites. - Il passe d'un registre de représentation à un autre en utilisant des tableurs, des logiciels, des applications Web ou tout autre outil technologique jugé pertinent. 	
Exemples de stratégies	<ul style="list-style-type: none"> • reformuler la situation dans ses mots et esquisser des schémas temporels pour illustrer sa compréhension du problème; • écrire littéralement les éléments de la situation qui semblent pertinents, facilitant ainsi la recherche d'un lien de dépendance afin de déterminer les variables en cause; • estimer, en les illustrant par des valeurs numériques, les types de relations existant entre les variables de la situation; • décrire les caractéristiques mathématiques de la situation dans le but de faire ressortir les limites et les contraintes réelles liées au problème; • formuler des questions en rapport avec le problème; • avancer de fausses suppositions dans le but de faire émerger une incohérence ou une absurdité pour corroborer ses perceptions ou les remettre en question.
LA PLANIFICATION	
<ul style="list-style-type: none"> - L'adulte cherche des pistes à emprunter et privilégie celles qui semblent les plus efficaces et économiques. - Il élabore un plan en tenant compte des différents registres de représentation et des éléments du langage mathématique (sens des symboles, des termes et des notations). - Il établit des liens structurés et fonctionnels entre ses connaissances, élargissant ainsi ses réseaux de ressources cognitives. 	
Exemples de stratégies	<ul style="list-style-type: none"> • tracer une carte conceptuelle liant les différentes étapes de la solution; • faire une liste des éléments appropriés à la représentation graphique ou algébrique d'une fonction; • se référer à une liste d'éléments à considérer en vue de consolider son plan de travail.
L'ACTIVATION	
<ul style="list-style-type: none"> - La construction de liens structurés et fonctionnels entre la capitalisation et l'actualisation des sommes investies permet à l'adulte d'élargir ses réseaux de ressources cognitives de nature mathématique. - En mobilisant ses connaissances relatives aux propriétés des modèles financiers, l'adulte est amené à déduire certains liens. - L'adulte donne du sens à la situation en utilisant une échelle appropriée au contexte pour représenter graphiquement la situation-problème. 	
Exemples de stratégies	<ul style="list-style-type: none"> • déterminer par recherche systématique la règle algébrique d'une fonction, en manipulant les différentes variables; • rechercher des combinaisons de variables simples (linéaires, quadratiques ou exponentielles) dans le but de déterminer la règle d'une fonction; • changer de perspective et observer l'évolution de la fonction en considérant l'axe des ordonnées (au lieu de celui des abscisses) comme étant son domaine.
LA RÉFLEXION	
<ul style="list-style-type: none"> - L'adulte adopte une attitude réflexive tout au long du traitement de la situation-problème. - Il se questionne régulièrement sur ses étapes de travail et sur les choix qu'il fait, avec l'intention de valider sa solution. - Un retour réflexif permet à l'adulte de rejeter des extrapolations qui n'auraient aucun sens dans la réalité. - L'adulte s'assure, pour le décodage des éléments à caractère mathématique, qu'il distingue bien le sens mathématique du sens commun des termes utilisés. 	
Exemples de stratégies	<ul style="list-style-type: none"> • vérifier la cohérence de sa solution : <ul style="list-style-type: none"> • en confirmant, par exemple, que l'axe des ordonnées représente l'évolution d'un emprunt ou d'un placement; • en s'assurant que les valeurs trouvées respectent l'image de la fonction; • en comparant la somme investie, les intérêts et le gain d'un placement; • en validant une interpolation ou une extrapolation graphique par la substitution des valeurs des variables dans l'expression algébrique.

COMPÉTENCES TRANSVERSALES

Les compétences transversales ne se construisent pas dans l'abstrait : elles prennent racine dans des situations-problèmes et participent, à divers degrés, au développement des compétences disciplinaires, et inversement.

Plusieurs compétences transversales peuvent contribuer au traitement de situations de la famille *Relations entre quantités*. Le programme d'études en propose deux qui apparaissent les plus appropriées pour ce cours : *Se donner des méthodes de travail efficaces* et *Exercer son jugement critique*.

Compétence d'ordre méthodologique

Lorsque l'adulte traite des situations-problèmes de la famille *Relations entre quantités*, il fait appel à des données issues de relevés financiers, de statistiques, de bilans ou de résultats d'études. Afin de mener sa tâche à terme, l'adulte doit développer la compétence *Se donner des méthodes de travail efficaces*. Il utilise alors des diagrammes temporels et des tableaux pour représenter une situation-problème, organiser et analyser des données, faciliter le dénombrement, calculer des valeurs financières et produire des graphiques illustrant l'évolution d'un placement ou d'un emprunt. Il échange avec ses pairs l'information relative à sa solution en explicitant sa démarche, ses choix de registres, ses décisions, ses recommandations ou ses conclusions. Il cherche, dans les réactions de ses pairs, des pistes qui lui permettent d'évaluer l'efficacité de sa solution ou la fiabilité de l'étude réalisée.

Compétence d'ordre intellectuel

Lorsque l'adulte déploie un raisonnement itératif, il explore et compare différentes possibilités, puis justifie ses choix. Il repère diverses relations et exploite, selon les buts poursuivis, des processus d'interpolation, d'extrapolation ou d'optimisation en s'appuyant sur sa compréhension des liens de dépendance et des concepts de fonction et de réciproque (capitalisation et actualisation). Il a recours à des procédés algébriques pour dégager des lois, des règles et des propriétés qui, à leur tour, servent à valider des conjectures, par exemple lorsque l'adulte démontre par déduction l'équivalence de deux taux d'intérêt. En développant ainsi sa compétence à *Exercer son jugement critique*, l'adulte est amené à adopter une attitude plus réfléchie avant de conclure un contrat qui le lie pour plusieurs mois.

CONTENU DISCIPLINAIRE

Dans ce cours, l'adulte réactive et approfondit l'ensemble des savoirs arithmétiques et algébriques acquis précédemment. Afin de traiter efficacement les situations-problèmes, il complète sa formation en s'appropriant les savoirs propres à ce cours.

Savoirs prescrits

En vue de traiter efficacement les situations d'apprentissage proposées dans ce cours, l'adulte développe deux procédés intégrateurs énoncés comme suit :

- **l'évaluation de propositions de placement financier adaptées à la situation;**
- **la création d'un plan de financement adapté à la situation.**

Ces procédés, mis en valeur dans les situations d'apprentissage du présent cours, favorisent l'intégration des savoirs mathématiques et des compétences disciplinaires. Les situations d'apprentissage traitées doivent toucher à l'un ou l'autre de ces procédés intégrateurs. Toutefois, l'ensemble des situations choisies doit être assez vaste pour couvrir les deux procédés.

Savoirs mathématiques	Limites et précisions
<p>Calcul financier lié à un placement ou à un emprunt</p> <ul style="list-style-type: none"> • Détermination de la période d'intérêt, de la capitalisation et de l'actualisation • Détermination du taux d'intérêts¹ : <ul style="list-style-type: none"> ○ simple, ○ composé, ○ équivalent. 	<p>Les formules à l'étude permettent de déterminer :</p> <ul style="list-style-type: none"> • l'actualisation (valeur actuelle) : $C_0 = C_n(1 + i)^{-n}$ • la capitalisation (valeur future) : $C_n = C_0(1 + i)^n$ • la période d'intérêt : $n = \frac{\log(C_n/C_0)}{\log(1 + i)}$ • le taux d'intérêt (i) dans des situations où l'intérêt est composé : $i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{1/n} - 1$

1. L'utilisation d'un tableur électronique est recommandée.

Savoirs mathématiques	Limites et précisions
<p>Analyse d'une suite de versements égaux ou inégaux</p> <ul style="list-style-type: none"> • Production et analyse de l'état de situation d'un placement • Interprétation de calculs dans un plan de financement <p>Analyse d'annuités (remboursement d'un emprunt par versements constants)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interprétation de calculs des annuités • Interprétation de calculs d'actualisation et de capitalisation <p>Analyse d'amortissement</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interprétation de tableaux ou de calculs d'amortissement 	<p>L'évolution d'un placement ou d'un emprunt est représentée à l'aide de diagrammes temporels.</p> <p>Les calculs de l'actualisation ou de la capitalisation d'une série de versements, égaux ou non, se font à l'aide de formules ou de logiciels.</p> <p><i>Un retrait équivaut à un versement négatif.</i></p> <p>L'étude d'une annuité se limite à :</p> <ul style="list-style-type: none"> • la détermination d'une annuité; • l'actualisation d'une série d'annuités; • la capitalisation d'une série d'annuités. <p>L'étude d'un amortissement, progressif ou constant, se limite au calcul :</p> <ul style="list-style-type: none"> • d'une annuité; • du nombre d'annuités; • de l'amortissement; • de la valeur résiduelle; • de l'intérêt et du capital dans une annuité.

Repères culturels

Les mathématiques financières s'appuient sur plus d'un repère culturel. De l'histoire de la monnaie aux grandes crises financières en passant par les différentes théories du crédit, de l'assurance, de l'immobilier, des actions, etc., le terreau est fertile. Ce cours offre à l'adulte les moyens de bien comprendre les grandes étapes qui ont amené les sociétés à se doter de modèles financiers. L'adulte pourrait découvrir, en outre, comment le mouvement brownien, l'équation de propagation de la chaleur ou la marche aléatoire ont influencé les mathématiciens dans l'élaboration de ces modèles.

FAMILLE DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

La famille *Relations entre quantités* regroupe les situations qui comportent une problématique purement mathématique pouvant être traitée en partie par l'évaluation d'une proposition de placement financier ou par la création d'un plan de financement adapté à la situation, dans une perspective générale.

DOMAINES GÉNÉRAUX DE FORMATION

Les domaines généraux de formation couvrent les grands enjeux contemporains. Idéalement, le choix des situations à traiter devrait être fait dans le respect des intentions éducatives des domaines généraux de formation puisque ces domaines représentent des toiles de fond sur lesquelles se greffent les situations-problèmes servant ainsi à donner du sens aux apprentissages de l'adulte. Deux de ces domaines sont particulièrement appropriés à ce cours : *Vivre ensemble et citoyenneté* et *Environnement et consommation*.

Vivre-ensemble et citoyenneté

L'adulte est déjà sensibilisé à l'importance de commencer tôt à économiser. Les notions financières et les outils de calcul présentés dans ce cours lui permettront d'analyser différentes stratégies financières lorsqu'un changement important ayant un effet sur son budget surviendra dans sa vie (naissance d'un enfant, retour aux études, achat d'une maison, etc.). Il devra être en mesure de continuer à répondre aux besoins de chaque membre de sa famille tout en épargnant suffisamment pour assurer son autonomie financière et maintenir ses habitudes de vie après la retraite.

Environnement et consommation

L'adulte aura à faire des investissements importants au cours de sa vie. Qu'il s'agisse de négocier une hypothèque, de souscrire une assurance vie ou de financer l'achat d'une voiture, sa capacité à analyser les différentes options de financement lui permettra de faire un choix éclairé. Cela correspond à l'un des axes de développement du domaine général de formation *Environnement et consommation*.

EXEMPLE DE SITUATION D'APPRENTISSAGE

Toutes les situations d'apprentissage ou situations-problèmes, peu importe le domaine général de formation retenu, placent l'adulte au cœur de l'action. Elles favorisent le développement des compétences disciplinaires et transversales visées, l'acquisition de notions et de concepts mathématiques de même que la mobilisation de ressources diverses utiles à la réalisation de la tâche.

Le tableau qui suit présente les éléments nécessaires à l'élaboration de toute situation d'apprentissage ou situation-problème. On y précise ceux retenus dans l'énoncé de situation-problème présenté et décrit aux pages suivantes.

ÉLÉMENTS NÉCESSAIRES À L'ÉLABORATION D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE, D'UNE SITUATION-PROBLÈME	
Domaine général de formation (ciblé) – Permet de contextualiser les apprentissages, de leur donner du sens.	<ul style="list-style-type: none"> • Environnement et consommation • Vivre ensemble et citoyenneté
Compétences disciplinaires (prescrites) – Se développent dans l'action. Nécessitent la participation active de l'adulte.	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes • Déployer un raisonnement mathématique • Communiquer à l'aide du langage mathématique
Famille de situations d'apprentissage (prescrite) – Regroupe des situations appropriées au cours à partir de problématiques tirées de la réalité. – Permet, entre autres, l'acquisition de connaissances mathématiques.	<ul style="list-style-type: none"> • Relations entre quantités
Compétences transversales (ciblées) – Se développent en contexte en même temps que les compétences disciplinaires.	<ul style="list-style-type: none"> • Exercer son jugement critique • Se donner des méthodes de travail efficaces
Savoirs essentiels (prescrits) – Sont des connaissances, des concepts, des notions mathématiques à acquérir.	<ul style="list-style-type: none"> • Voir liste

Cette rubrique propose, en fait, un exemple d'énoncé de situation-problème accompagné d'exemples d'actions associées au traitement mathématique. Cet énoncé est constitué d'un contexte qui sert de fil conducteur, mais les activités d'apprentissage incluses n'y sont pas détaillées de façon formelle. L'accent est plutôt mis sur un exemple de traitement mathématique pertinent, qui respecte les quatre phases de la résolution : la représentation, la planification, l'activation et la réflexion. Toutefois, même si ce n'est pas explicite, on peut discerner les éléments qui composent cet énoncé, éléments identifiés dans le précédent tableau, soit : le domaine général de formation, les compétences disciplinaires, la famille de situations, les compétences transversales et les savoirs essentiels. Pour favoriser l'apprentissage, ces différents éléments doivent former un tout cohérent et signifiant pour l'adulte.

L'enseignante ou enseignant peut se servir de chacun des éléments comme autant d'objets de formation. Ces objets peuvent être des actions associées à chacune des phases de résolution, des actions relatives aux compétences disciplinaires ou transversales ou encore aux savoirs prescrits. L'enseignante ou enseignant a la possibilité d'utiliser l'exemple de traitement mathématique fourni pour construire d'autres tâches complexes ou d'autres activités d'apprentissage liées aux connaissances mathématiques que l'adulte doit acquérir.

Énoncé de situation-problème	Exemples d'actions associées au traitement mathématique d'une situation-problème appartenant à la famille <i>Relations entre quantités</i>
<p>L'accessibilité aux études postsecondaires des enfants est une question préoccupante pour tous les parents. À un moment donné, certains parents font face à des choix. Quel type d'épargne privilégier pour assumer les coûts liés aux études? Entre un régime enregistré d'épargne-études et un régime enregistré d'épargne-retraite, lequel choisir?</p>	<p>Procédés intégrateurs : <i>Évaluation de propositions de placement financier adaptées à la situation;</i> <i>Création d'un plan de financement adapté à la situation.</i></p> <p>Au cours de l'une ou l'autre des quatre phases de résolution, l'adulte pourrait accomplir les actions suivantes :</p> <p>Représentation - Sélectionner le registre de représentation (algébrique ou graphique) le plus approprié et estimer l'évolution de quelques types de placement</p> <p> - Représenter l'évolution d'une suite de versements à l'aide d'un diagramme temporel.</p> <p>Planification - Recourir à la représentation algébrique dans le but de comparer les coûts et les rendements des différents placements.</p> <p>Activation - Établir la règle algébrique qui lie les divers éléments de la situation (le taux, les intérêts, les annuités, les amortissements, etc.) pour pouvoir ensuite extrapoler le rendement associé à chaque type de régime;</p> <p> - Énoncer une conjecture relative aux différentes étapes du placement, puis la vérifier algébriquement ou graphiquement;</p> <p> - Utiliser un tableur pour analyser l'évolution des placements et déterminer lequel est le meilleur, ou encore pour trouver le moment à partir duquel l'un devient plus intéressant que l'autre.</p> <p>Réflexion - Remarquer que, pour des valeurs extrêmes, l'extrapolation graphique est peu réaliste;</p> <p> - Valider une extrapolation graphique par un calcul algébrique;</p> <p> - Vérifier le calcul de la capitalisation à l'aide de la formule de l'actualisation;</p> <p> - Décider du modèle qui convient le mieux à la situation financière du ménage.</p>

ATTENTES DE FIN DE COURS

Pour traiter les situations-problèmes de la famille *Relations entre quantités*, l'adulte évalue des propositions de placement financier adaptées à différentes situations ou produit un plan de financement adapté à une situation. Pour ce faire, il met en œuvre les trois compétences disciplinaires du programme, soit : *Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes*, *Déployer un raisonnement mathématique* et *Communiquer à l'aide du langage mathématique*.

Lorsque l'adulte évalue des propositions de placement financier en se représentant la situation-problème à l'aide d'un modèle algébrique ou graphique, il recourt à diverses stratégies pour cerner le problème. Pour ce faire, il reformule la situation-problème dans ses propres mots et détermine les éléments importants à retenir et les obstacles à surmonter. Il identifie efficacement les variables en jeu et cible celles dont il doit calculer la valeur (taux, durée, capitalisation, actualisation, etc.) en utilisant des tables de valeurs (parfois des tables actuarielles), des schémas ou des diagrammes temporels. Il choisit la représentation la plus juste parmi les fonctions à l'étude dans ce cours en gardant en tête qu'elle ne reflète pas parfaitement la réalité observée. Il valide sa représentation en vérifiant la cohérence de sa solution à l'aide de données bancaires connues. Lorsqu'il explique ses conclusions à la suite de l'évaluation de propositions de placement financier, il produit sa représentation de la situation-problème, détermine l'objet du message et respecte les codes et les règles mathématiques pour communiquer adroitement son intention. Il choisit le registre de représentation le mieux adapté à la situation dans le but de toucher un plus grand public.

Lorsque l'adulte crée un plan de financement à partir d'un modèle algébrique ou d'un tableau d'amortissement, il interprète le modèle présenté en formant des liens entre les éléments du message et en distinguant les éléments pertinents de ceux qui ne le sont pas. Il reconnaît l'objet du message et en dégage l'idée maîtresse. De plus, il déploie un raisonnement mathématique en explorant la situation-problème et en formulant des questions en rapport avec la problématique à l'étude. Il recueille les informations pertinentes en vue de tirer une conclusion. Il établit une ou des conjectures en proposant des idées probables ou vraisemblables et anticipe, au besoin, des annuités et des amortissements qui lui permettront de valider son plan de financement.

CRITÈRES D'ÉVALUATION DES COMPÉTENCES VISÉES PAR LE COURS

Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes

- *Manifestation, oralement ou par écrit, d'une compréhension adéquate de la situation-problème*
- *Mobilisation de stratégies et de savoirs mathématiques appropriés à la situation-problème*
- *Élaboration d'une solution* appropriée à la situation-problème*
- *Validation appropriée des étapes** de la solution élaborée*

* La solution comprend une démarche, des stratégies et un résultat.

** Le modèle mathématique, les opérations, les propriétés ou relations.

Déployer un raisonnement mathématique

- *Formulation d'une conjecture appropriée à la situation*
- *Utilisation correcte des concepts et des processus mathématiques appropriés*
- *Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation*
- *Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente*
- *Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente*

Communiquer à l'aide du langage mathématique

- *Interprétation juste d'un message à caractère mathématique*
- *Production d'un message conforme à la terminologie, aux règles et aux conventions propres à la mathématique et en fonction du contexte*